数理解析研究所講究録
102巻 1970年 24-40

Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations for Hilbert space-valued functions.

京大 数研　斉藤義実

§0. Introduction.

微分作用素

(1) $$-\frac{d^2}{dr^2}+A(r) \qquad (r\geqq 0)$$

を考えよう。ここに $A(r)$ は Hilbert space H 上で定義された有界自己共役作用素とし，(1) は H-valued function $F(r)$ に作用するものと考える。$r=0$ における境界条件として

(2) $$BF'(0)-CF(0)$$

を考える．B, C も H 上の有界自己共役作用素とする。作用素(1)-(2)は $\mathfrak{H}=L_2(0,\infty;H)$ の作用素と考えることができる．

H. Weyl - M.H. Stone - E.C. Titchmarsh - K. Kodaira の一次元における一般展開定理の理論を抽象化することによって，作用素

(1)−(2)の固有関数展開を次のような形に行なうことができる：

$r\in[0,\infty)$ に対して "eigenoperator" $\Phi(r,\lambda)$ が存在して

$$\begin{cases} -\Phi''(r,\lambda)+A(r)\Phi(r,\lambda)=\lambda\Phi(r,\lambda) \\ C\Phi(0,\lambda)-B\Phi'(r,\lambda)=0 \end{cases} \qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

をみたす. $\Phi(r,\lambda)$ は（r, λをとめるごとに）H上の有界作用素である。L_0を微分作用素(1)−(2)の一つの自己共役拡大としよう. このとき "the generalized Fourier space of L_0" である $\mathfrak{H}_\rho$ なる Hilbert space が存在して,

(A) "generalized Fourier transform" $\mathfrak{F}$ を

$$(\mathfrak{F}F)(\mu)=\int_0^\infty \Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr$$

で定義すると, $\mathfrak{F}$は$\mathfrak{H}$から$\mathfrak{H}_\rho$へのunitary 変換となる。

(B) $$\begin{cases} E(\Delta)=\mathfrak{F}^*C_\Delta\cdot\mathfrak{F} & (C_\Delta \text{は} \Delta \text{の特性関数}) \\ L_0=\mathfrak{F}^*\mu\mathfrak{F} \end{cases}$$

が成立する.

F. S. Rofe-Beketov [5]は同様の作用素に対して$\mathfrak{F}$が（必ずしも unitary operatorではなく）isometric operatorとなるような$\mathfrak{H}_\rho$の存在を証明している。またWilli Jäger [2]は, non-negative definit self-adjoint の $B(r)$ とある意味で $C(r)\to 0$ $(r\to\infty)$ をみたす $C(r)$ に対して $-\frac{d^2}{dr^2}+B(r)+C(r)$ の固有関数展開を（本論の方法とは違う方法で）行なっている.

§7. 方程式 $\left(\frac{d^2}{dr^2}+A(r)-\lambda\right)F(r)=0$

Hを可分なHilbert空間とする．$(0,\infty)$上のH-valued L_2関数のなすHilbert空間$L_2(0,\infty;H)$を$\mathfrak{H}$と書くことにする．これらのHilbert空間のノルム，内積は，必要があれば，$\|\ \|_H$，$(\ ,\ )_{\mathfrak{H}}$のごとく添数をつけるが，混同の恐れがない限り，単に$\|\ \|$，$(\ ,\ )$で表わすことにする．

$\mathbb{B}$をHにおける有界線型作用素の全体とする．そして$A(r)$を$[0,\infty)$上の$\mathbb{B}$-valued functionとし，次の仮定がみたされているものとする：

<u>Assumption 1.1.</u> (1) $r\in[0,\infty)$に対し，$A(r)$はH上の有界な自己共役作用素である．

(2)任意の$r\in[0,\infty)$について

$$\int_0^r\|A(r)\|^2dr<\infty,\quad (\|A(r)\|\text{は}A(r)\text{の operator norm}).$$

つまり$\|A(r)\|^2$は$[0,\infty)$で局所可積分である．

(3)任意の$r\in[0,\infty)$に対して正数C_rが定まり

$$\int_0^r(A(s)F(s),F(s))_H\,ds\geqq -C_r\int_0^r\|F(s)\|_H^2\,ds$$

がすべての$F\in\mathfrak{H}$に対して成立する．

以下方程式

$$(1.1)\qquad \left(-\frac{d^2}{dr^2}+A(r)-\lambda\right)F(r)=0$$

の初期値問題を考えるわけであるが，そのために次の定義を行なう：

<u>Definition 1.1</u>. $u_0, v_0 \in H$ としまた $\lambda \in \mathbb{C}$ としよう．$[0,\infty)$ 上の H-valued function $F(r)$ が次の条件(1)〜(5)をみたすとき，$F(r)$ を (initial) data $\{u_0, v_0\}$ に対する (1.1) の解であるという：

(1) weak derivative $F'(r)$ が各実 r で存在して，$\|F'(r)\|_H$ は $[0,\infty)$ 上局所可積分である．

(2) $[0,\infty)$ に含まれる任意の閉区間 $[\alpha,\beta]$ で $F'(r)$ は weakly absolutely continuous.

(3) $F'(r)$ は $[0,\infty)$ 上ほとんどいたるところ weak derivative $F''(r)$ をもち，$\|F''(r)\|_H$ は $[0,\infty)$ 上局所可積分．

(4) ほとんどいたるところ

$$-F''(r)+A(r)F(r)=\lambda F(r)$$

が成立し，しかも

(5) $$\begin{cases} F(0)=u_0, \\ F'(0)=v_0 \end{cases}$$

が成立する．

<u>Proposition 1.1.</u> data $\{u_0, v_0\}$ に対する (1.1) の解は unique に存在する.

証明は問題を積分方程式に変換して逐次近似法を用いればよい.

さて次に $r=0$ において境界条件を考えるために,

<u>Definition 1.2.</u> (1) 初期値として

$$\begin{cases} F_1(0) = u \\ F'(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} F_2(0) = 0 \\ F_2'(0) = v \end{cases}$$

をとった場合の解 F_1, F_2 によって作用素 $\Phi_0(r,\lambda)$, $\Theta_0(r,\lambda)$ を導入する;

$$\Phi_0(r,\lambda)u = F_1(r), \qquad \Theta_0(r,\lambda)v = F_2(r).$$

$\Phi_0(r,\lambda)$, $\Phi_0'(r,\lambda)$, $\Theta_0(r,\lambda)$, $\Theta_0'(r,\lambda)$ などはすべて $[0,\infty)$ 上の $\mathbb{B}$-valued function となり, Φ_0, Θ_0 は operator-valued functions として (1.1) を満足する.

(2) H が二つの閉部分空間 H_1, H_2 によって直和に分解しているとする. $H = H_1 \oplus H_2$. そして B_2 と C_2 を H_2 上で定義され, H_2 内に値をとる有界自己共役作用素とする. しかも

$$B_2 C_2 = C_2 B_2,$$

が成立し，逆作用素B_2^{-1}が存在するとする．このとき，

$$B=\begin{cases}0 & \text{on } H_1\\ B_2 & \text{on } H_2\end{cases},\qquad C=\begin{cases}\text{identity} & \text{on } H_1\\ C_2 & \text{on } H_2\end{cases}$$

とおいて，$\mathbb{B}$-valued function $\phi(r,\lambda)$を

$$(1.2)\qquad \phi(r,\lambda)=\phi_0(r,\lambda)B+\theta_0(r,\lambda)C$$

で定義する．

Definition 1.2 から $\phi(r,\lambda)$ は $r=0$ で境界条件

$$(1.3)\qquad B\phi'(0,\lambda)-C\phi(0,\lambda)=0$$

をみたすことがわかる．

§2. 作用素 $-\frac{d^2}{dr^2}+A(r)$

最初に右の作用素として $-\frac{d^2}{dr^2}+A(r)$ を定義するために必要な
用
H-valued function に関する Green の公式を導入しよう．

<u>Definition 2.1.</u> $[\alpha,\beta]$ を $[0,\infty)$ に含まれる有界閉区間として $\mathcal{D}[\alpha,\beta]$ を次の (1)〜(3) をみたす H-valued function の全体とする：

(1) $F(r)$ は $[\alpha,\beta]$ 上 weakly differentiable で，$\|F(r)\|_H\in L_1[\alpha,\beta]$.

(2) $F'(r)$ は weakly absolutely continuous on $[\alpha,\beta]$.

(3) $F'(r)$ はほとんどいたるところ weak derivative $F''(r)$ をもち $\|F''(r)\|_H \in L_1[\alpha,\beta]$.

<u>Proposition 2.1.</u> $F_1, F_2 \in \mathcal{D}[\alpha,\beta]$ とすると,

$$\int_\alpha^\beta \{ (\mathcal{L}F_1(r), F_2(r))_H - (F_1(r), \mathcal{L}F_2(r))_H \} dr$$
$$= [F_1, F_2](\beta) - [F_1, F_2](\alpha).$$

ここで,

$$\begin{cases} \mathcal{L}F_i(r) = -F_i''(r) + A(r)F_i(r) \quad (i=1,2), \\ [F_1, F_2](r) = (F_1(r), F_2'(r))_H - (F_1'(r), F_2(r))_H. \end{cases}$$

<u>Corollary 2.1.</u> $F_1 \in \mathcal{D}[\alpha,\beta]$ とし, F_2 は Definition 2.1 の(1)(2) をみたしているとする. このとき,

$$\int_\alpha^\beta (\mathcal{L}F_1(r), F_2(r))_H dr = \int_\alpha^\beta \{(F_1'(r), F_2'(r))_H + (A(r)F_1(r), F_2(r))_H\} dr$$
$$-(F_1'(r), F_2(r))\Big|_\alpha^\beta.$$

これら Green の公式は R^1 の場合と同様に証明される. (すなわち $F_i(r)$ が実関数で, $A(r)$ も同じく実関数の場合).

次に differential operator $-\frac{d^2}{dr^2} + A(r)$ を与の operator として定

義しよう.

<u>Definition 2.2.</u> H-valued function $F(r)\in\mathcal{D}$ とは,

(i) 任意の $[0,\infty)$ に含まれる有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ について, $F\in\mathcal{D}[\alpha,\beta]$ が成立する.

(ii) B, C は Definition 1.2 で定義されたものとする. $F(r)$ は境界条件 $CF(0)-BF'(0)=0$ をみたす.

(iii) $F(r)\in\mathfrak{H}$. また $-F''(r)+A(r)F(r)\in\mathfrak{H}$.

このとき operator L を

$$\begin{cases}\mathcal{D}(L)=\mathcal{D}\\ LF(r)=-F''(r)+A(r)F(r)\end{cases}$$

で定義する. ($\mathcal{D}(L)$ は L の定義域を意味するものとする).

このとき,

<u>Theorem 2.1.</u> L は closed operator である.

この Theorem 2.1 より L は、境界条件が与えられたとき, 《maximal Sturm-Liouville operator》と考えることができる. 次節では L の ($\mathfrak{H}$ における) 自己共役制限を考察し, その固有関数展開を行なう.

§3. 固有関数展開.

§2で定義したLの中における自己共役制限の一つをL_0としよう(このような自己共役制限は一般には無数にある)。そして$E(\mu)$をL_0の単位の分解とする.

まずこの節で用いられるある種のvector-valued integralの定義を与える.

<u>Definition 3.1</u>. $[\mu_1, \mu_2]$を$R=(-\infty,\infty)$の有限区間であるとする. $Q(\mu)$, $\alpha(\mu)$は$[\mu_1,\mu_2]$上で定義されたB-valued functionsとし, $U(\mu)$を$[\mu_1,\mu_2]$上で定義されたH-valued functionとする. 今Δを$[\mu_1,\mu_2]$の有限個の分割とする, すなわち

$$\Delta = \Delta(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n),$$

ここに

$$\mu_1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_n = \mu_2 .$$

そして

$$\delta(\Delta) = \max_{i=0,\cdots n-1} (\eta_{i+1} - \eta_i)$$

とおく.

もし $\eta_i \leqq \eta_i' \leqq \eta_{i+1}$ として

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\eta_i')(\alpha(\eta_{i+1}) - \alpha(\eta_i)) U(\eta_i') \quad \text{又は} \quad \lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\eta_i')(U(\eta_{i+1}) - U(\eta_i))$$

がη_i'のとりかたや分割のしかたに無関係にHの弱位相の意味で収束するならば, そのlimitを

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} Q(\mu)\,\alpha(d\mu)\,U(\mu) \qquad \text{又は} \qquad \int_{\mu_1}^{\mu_2} Q(\mu)\,U(d\mu)$$

と書くことにする．

単位の分解 $E(\mu)$ と§1で定義された $\Phi(r,\lambda)$ とは次のように関係付けられる．

<u>Proposition 3.1</u>. $F\in\mathfrak{H}$, $I=[\mu_1,\mu_2]$ とする．このとき

$$F(r,I)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\Phi(r,\mu)\left(P_1F'(0,d\mu)+B_2^{-1}P_2F(0,d\mu)\right). \tag{3.1}$$

ここで

$$F(r,I)=E(I)F(r)=(E(\mu_2)-E(\mu_1))F(r),$$

$$F(0,\mu)=E(\mu)F(0), \qquad F'(0,\mu)=(E(\mu)F)'(0).$$

また P_1, P_2 は Definition 1.2 の H_1, H_2 の射影作用素であり，B_2^{-1} も Definition 1.2 で定義された通りである．

証明は，(3.1) の両辺が微分積分方程式

$$LU(r,\lambda)=\int_0^{\lambda}\mu\,dU(r,\mu)$$

をみたし，$r=0$ における初期値も一致することを用いる．

<u>Definition 3.2</u>. $I=[\mu_1,\mu_2]$ とする．このとき H の中に値をもつ $\mathfrak{H}$ 上で定義された線型作用素 $\xi(I)$ を

$$\xi(I)F = P_1 F'(0,I) + B_2^{-1} P_2 F(0,I)$$

で定義する．

単位の分解 $E(\mu)$ の性質と closed graph theorem を用いて，次のような $\xi(I)$ の性質が成立する．

Proposition 3.2. $\xi(I)$ は $\mathfrak{H}$ 上で定義された有界作用素であり，したがって $\xi^*(I)$ は H 上で定義された $\mathfrak{H}$ 内に値をもつ有界作用素である．そして $I_1=(\mu_1,\mu_2]$，$I_2=(\chi_1,\chi_2]$ とするとき，

(i)

$$(3.2)\quad \begin{cases} \xi(I_1 \cup I_2) = \xi(I_1) + \xi(I_2) \\ \xi^*(I_1 \cup I_2) = \xi^*(I_1) + \xi^*(I_2) \end{cases} \qquad (I_1 \cap I_2 = \phi \text{ として})$$

(ii)

$$(3.3)\quad \begin{cases} E(I_1)\xi^*(I_2) = \xi^*(I_1 \cap I_2) \\ \xi(I_2)E(I_1) = \xi(I_1 \cap I_2) \end{cases}$$

(iii) $\xi(I_1)\xi^*(I_2) = \xi(I_1 \cap I_2)\xi^*(I_1 \cap I_2)$

(iv) $I = (\lambda_1, \lambda_2]$ に対して B-valued function $\rho(I)$ を

$$\rho(I) = \xi(I)\xi^*(I)$$

と定義すれば，$\rho(I)$ は symmetric, non-negative definite, additive interval function である．

Proposition 3.1 と 3.2 を組合せることによって，$\xi(I)$, $\xi^*(I)$, $\rho(I)$, $\Phi(r,\lambda)$ の間の関係がわかる．

<u>Proposition 3.3.</u> $I=(\mu_1,\mu_2]$ とする．また

$$\xi(\mu)=\begin{cases}\xi((0,\mu]) & \text{if } \mu\geqq 0,\\ -\xi((\mu,0]) & \text{if } \mu\geqq 0,\end{cases}$$

$$\rho(\mu)=\xi(\mu)\,\xi^*(\mu)$$

とおく．このとき $u\in H$ に対して

$$(3.4)\qquad [\xi^*(I)u](r)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\Phi(r,\mu)\,\rho(d\mu)\,u$$

が成立する．また carrier compact で十分なめらかな $F\in\mathfrak{H}$ に対して

$$(3.5)\qquad (\xi(I)F)(r)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\rho(d\mu)\left[\int_0^\infty\Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr\right]$$

が成立する．

(3.1) において $F=\xi^*(I)u$ とおけば，(3.3) を考慮して (3.4) が得られる．また $F(r)\equiv 0$ for $r\geqq r_0$ として

$$\begin{aligned}(\xi(I)F,u)_H=(F,\ \xi^*(I)u)_{\mathfrak{H}}&=\int_0^{r_0}\Big(F(r),\ \int_{\mu_1}^{\mu_2}\Phi(r,\mu)\rho(d\mu)\Big)_H dr\\ &=\int_0^{r_0}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\big(\rho(d\mu)\Phi^*(r,\mu)F(r),\ \mu\big)_H\,dr\\ &=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\Big(\rho(d\mu)\int_0^{r_0}\Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr,\ u\Big)_H\\ &=\Big(\int_{\mu_1}^{\mu_2}\rho(d\mu)\Big[\int_0^\infty\Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr\Big],\ u\Big)_H\end{aligned}$$

より(3.5)がわかる。(もちろんこれらの積分が存在すること，また積分順序の交換の可能性などは証明することが必要であるが)。

《the generalized Fourier space》を定義する第一段階として次の定義を与える。

<u>Definition 3.3</u> $f(\mu)$, $g(\mu)$ を $[\mu_1, \mu_2]$ で定義された H-valued functions とする。Definition 3.1 と同様に分割 Δ を定めて，

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\rho(\eta_{i+1})-\rho(\eta_i)\right)f(\eta_i'),\ g(\eta_i')\right)_H$$

が存在するとき，これを

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2}\left(\rho(d\mu)f(\mu),\ g(\mu)\right)_H .$$

でしめすことにする

$f(\mu)$, $g(\mu)$ が適当になめらかならこの積分が存在することが示される。

<u>Proposition 3.4</u> $F\in\mathfrak{H}$ が compact carrier をもち，十分なめらかであるとする。$I=[\mu_1, \mu_2]$ として

$$(\mathcal{F}_0 F)(\mu)=\int_0^\infty \phi^*(r,\mu)F(r)\,dr$$

とおけば，

(i) $$(E(I)F)(r)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\Phi(r,\mu)\,\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu)$$

(ii) $$\|E(I)F\|_{\mathfrak{H}}^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu),(\mathcal{F}_0F)(\mu))_H,$$

$$\|F\|_{\mathfrak{H}}^2=\lim_{\substack{\mu_1\to-\infty\\ \mu_2\to\infty}}\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu),(\mathcal{F}_0F)(\mu))_H$$

(iii) $$L_0E(I)F(r)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\mu\,\Phi(r,\lambda)\,\rho(d\mu)\,(\mathcal{F}_0F)(\mu).$$

(i)は(3.1)と(3.5)から得られる．(i)を用いて(ii)と(iii)が得られる．

さて，$\mathbb{R}$上で定義されたH-valued function $U(\mu)$で十分なめらかでcarrierがcompactなものの全体を$\mathcal{U}$とする．$\mathcal{U}\ni U(\mu)$に対して

$$\|U\|_\rho^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)U(\mu),U(\mu))_H$$

でUのnorm $\|U\|_\rho$を定義する．ただし $\mathrm{car}\,U\subset[\mu_1,\mu_2]$．このノルムを用いて$U,V\in\mathcal{U}$に対して内積$(U,V)_\rho$を

$$(U,V)_\rho=\frac{1}{4}\left\{(\|U+V\|_\rho^2-\|U-V\|_\rho^2)+i(\|U+iV\|_\rho^2-\|U-iV\|_\rho^2)\right\}$$

で定義する．このとき$\mathcal{U}$はpre-Hilbert spaceと考えることができる．このpre-Hilbert space $\mathcal{U}$を用いて generalized Fourier space $\mathfrak{H}_\rho$と generalized Fourier transform $\mathcal{F}$を次のように定

義する

<u>Definition 3.4</u>. pre-Hilbert space $\mathcal{U}$を完備化して得られるHilbert space をL_0の generalized Fourier spaceということにして，$\mathfrak{H}_\rho$であらわす．Proposition 3.4より$\mathcal{F}_0$は$\mathfrak{H}_\rho$に値をもつ有界作用素であるから，これを$\mathfrak{H}$上に拡張した作用素を$\mathcal{F}$であらわし，L_0の generalized Fourier transform ということにする．$\mathcal{F}$は$\mathfrak{H}$上で定義され$\mathfrak{H}_\rho$の中に値をもつ isometric operator である．

$\mathcal{F}^*$に関しては次のような表現が可能である．

<u>Proposition 3.5</u>. $U \in \mathcal{U}$なら

(3.6) $$\mathcal{F}^* U(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(r,\mu)\rho(d\mu)U(\mu).$$

L_0の固有関数展開は次の形をとる．

<u>Theorem 3.1.</u> $\mathfrak{H}_\rho$と$\mathcal{F}$をDefinition 3.4の通りとする．このとき，

(i) $\mathcal{F}$は$\mathfrak{H}$から$\mathfrak{H}_\rho$の上へのunitary operatorである．

(ii) Iを$\mathbb{R}$上のintervalとし$G_I(\mu)$をIの特性関数とすると，

$$E(I) = \mathcal{F}^* G_I \mathcal{F}.$$

(iii) $F \in \mathcal{D}(L_0) \Longleftrightarrow \mu \cdot (\mathcal{F}F)(\mu) \in \mathfrak{H}_\rho$ そしてこのとき，

$$L_0 F = \mathcal{F}^* \mu \cdot \mathcal{F} F$$

が成立する．

(i)の証明に関して言えば，$U \in \mathfrak{H}_\rho$に対して

$$\| \mathcal{F}^* U \|_{\mathfrak{H}} = \| U \|_\rho$$

を示せばよい．そのためにはUが step function の場合を考えればよい．

$$U(\mu) = \begin{cases} u_k & \mu \in [\eta_k, \eta_{k+1}] \quad (k=0,1,\ \ ,N-1) \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

として (3.4)と(3.6)より $\Delta_k = (\eta_k, \eta_{k+1}]$ として

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* U(r) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \Phi(r,\mu)\rho(d\mu) u_k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(r) \end{aligned}$$

であるから，Proposition 3.2 を用いて

$$\begin{aligned} \| \mathcal{F}^* U \|_{\mathfrak{H}}^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(\cdot), \sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(\cdot) \Big)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \big(\xi(\Delta_k)\xi^*(\Delta_k) u_k, u_k \big)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (\rho(\Delta_k) u_k, u_k) \quad = \| U \|_\rho^2 \end{aligned}$$

となる．

Bibliography

[1] V. I. Gorbačuk and M. L. Gorbačuk, Expansion in Eigenfunctions of a second-order differential Equation with operator coefficient, Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 184 (1969), No 4. (Soviet Math. Vol 10 (1969), No. 1).

[2] Willi Jäger, Ein gewöhnlicher Differentialoperator zweiter Ordnung für Funktionen mit Werten in einer Hilbertraum, Math. Z. 113, 68-98.

[3] K. Kodaira, On singular solutions of second-order differential operators, Sugaku I (1948), 177-191; II (1949), 113-139 (Japanese).

[4] K. Kodaira, The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's Theory of S-matrix, Amer. J. Math. 71 (1949) 921-945.

[5] F. S. Rofe-Beketov, Eigenfunction expansions for infinite system of differential equation in non-selfadjoint and self-adjoint cases, Mat. Sb. 51 (93) (1960), 293-342 (Russian).